1 Non-localized Natural Deduction

Introduction Rules

$$\frac{X \qquad Y}{X \wedge Y}\,\wedge\mathsf{I}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\overline{X}\,x\\ \vdots\\ Y\end{array}}{X \to Y}\,\to\mathsf{I}_x$$

$$\frac{X}{X \vee Y}\,\vee\mathsf{I}^{\mathsf{L}} \qquad \frac{Y}{X \vee Y}\,\vee\mathsf{I}^{\mathsf{R}}$$

$$\frac{}{\top}\,\top\mathsf{I}$$

none

Elimination Rules

$$\frac{X \wedge Y}{X}\,\wedge\mathsf{E}^{\mathsf{L}} \qquad \frac{X \wedge Y}{Y}\,\wedge\mathsf{E}^{\mathsf{R}}$$

$$\frac{X \to Y \qquad X}{Y}\,\to\mathsf{E}$$

$$\frac{X \vee Y \qquad \begin{array}{c}\overline{X}\,x\\ \vdots\\ Z\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overline{Y}\,y\\ \vdots\\ Z\end{array}}{Z}\,\vee\mathsf{E}_{x,y}$$

none

$$\frac{\bot}{\varphi}\,\bot\mathsf{E}$$

2 Localized Natural Deduction

Introduction Rules

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{X} : X \qquad \Gamma \vdash \mathcal{Y} : Y}{\Gamma \vdash \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle : X \wedge Y} \wedge\mathsf{I}$$

$$\frac{\Gamma,\ x : \varphi \vdash \mathcal{Y} : Y}{\Gamma \vdash \lambda x.\mathcal{Y} : X \to Y} \to\mathsf{I}_x$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{X} : X}{\Gamma \vdash \mathsf{inl}\ \mathcal{X} : X \vee Y} \vee\mathsf{I}^{\mathsf{L}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{Y} : Y}{\Gamma \vdash \mathsf{inr}\ \mathcal{Y} : X \vee Y} \vee\mathsf{I}^{\mathsf{R}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{tt} : \top} \top\mathsf{I}$$

—

Elimination Rules

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{P} : X \wedge Y}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}\ \mathcal{P} : X} \wedge\mathsf{E}^{\mathsf{L}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathcal{P} : X \wedge Y}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}\ \mathcal{P} : Y} \wedge\mathsf{E}^{\mathsf{R}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{F} : X \to Y \qquad \Gamma \vdash \mathcal{X} : X}{\Gamma \vdash \mathcal{F}\mathcal{X} : Y} \to\mathsf{E}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{D} : X \vee Y \qquad \Gamma,\ x : X \vdash \mathcal{Z} : Z \qquad \Gamma,\ y : Y \vdash \mathcal{Z}' : Z}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ \mathcal{D}\ \mathsf{of}\ \{\ \mathsf{inl}\ x \mapsto \mathcal{Z}\ ;\ \mathsf{inr}\ y \mapsto \mathcal{Z}'\ \} : Z} \vee\mathsf{E}_{x,y}$$

—

$$\frac{\Gamma \vdash \mathcal{L} : \bot}{\Gamma \vdash \bot\mathsf{elim}\ \mathcal{L} : \varphi} \bot\mathsf{E}$$